Stochastic Resonance in Quantum Systems (Non-Commutative Analysis and Micro-Macro Duality)

鈴木, 増雄

数理解析研究所講究録
第 1658 巻 2009 年 179-193

Stochastic Resonance in Quantum Systems

東京理科大学理学部　鈴木増雄(Masuo Suzuki)
Tokyo University of Science

1. はじめに

自然現象の本質を知るには，まず良く観察することである。次に，外部からいろいろと系統的に力（刺激）を与えて，その応答を知ることである。特に，振動する力を与えてその共鳴を調べることは極めて有効である。その際，加える力とは独立に，ランダムな力（ノイズ）が系にかかっていると，多くの場合に応答は弱くなる。ところが，系によっては，ある程度ノイズがかかった方が応答が増幅される場合がある。これを「確率共鳴」という。[1] これは，自然界に大変広範囲に見られる現象である[1]。

この講演では，量子効果が確率共鳴にどう影響するかを知らべる。量子効果と古典的なノイズの両方存在

する物理系を理論的に扱う簡単な方法として，ノイズの効果を現象論的に取り込んだ次の散逸フォン・ノイマン方程式を導入する。

$$\frac{\partial \rho(t)}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar}\left[\mathcal{H}(t), \rho(t)\right] - \varepsilon(T)\left(\rho(t) - \rho_{quas}(t)\right) \quad (1.1)$$

ただし，$\rho(t)$は系の密度行列を表し，$\varepsilon(T)$はノイズによる系の緩和時間τの逆数である：$\varepsilon(T)=1/\tau$。また，$\rho_{quas}(t)$をどのようにとるかは，扱う物理現象による。確率共鳴を扱うには，

$$\rho_{quas}(t) = \frac{1}{Z(t)} e^{-\beta \mathcal{H}(t)}, \quad Z(t) = \mathrm{Tr}\, e^{-\beta \mathcal{H}(t)}; \quad \beta = \frac{1}{k_B T} \quad (1.2)$$

とおけばよい。[2] ここで，$\mathcal{H}(t)$は系のハミルトニアンであり，式(1.1)の中の$\mathcal{H}(t)$と同じものである。

2. 量子系における確率共鳴

ここでは，量子スピン系における確率共鳴を扱うことにする。まず，確率共鳴のメカニズムを古典的な連続変数の場合に模式的に示すと図1，2のようになる。

量子系でノイズの効果を扱うには，前節のように現象論的に緩和項として取り込むのが手取り早い。その際，緩和時間τは，バリアの高さΔの関数として，

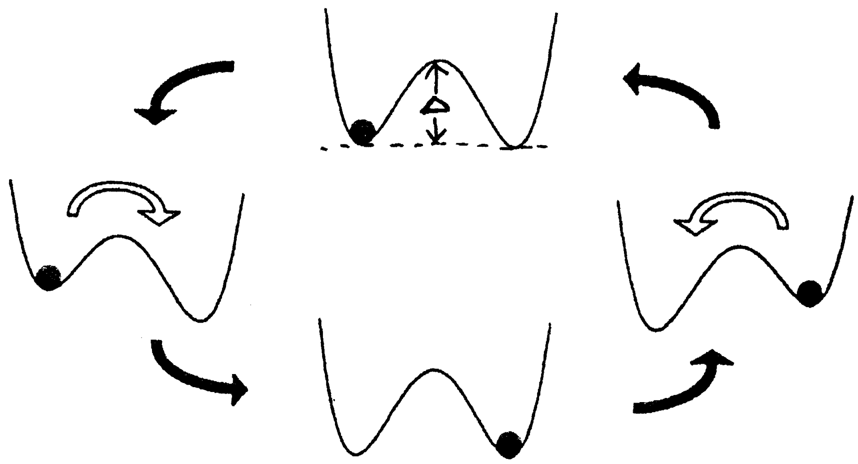


図1. 連続変数の場合の確率共鳴の起り方の概略図[2]。
周期的な外力によって２重井戸型ポテンシャルが変化する。ここで，Δはそのバリアの高さを表す。ノイズの強さがバリアの大きさΔの程度になると，系は外力に応答し易くなり，共鳴が起る。

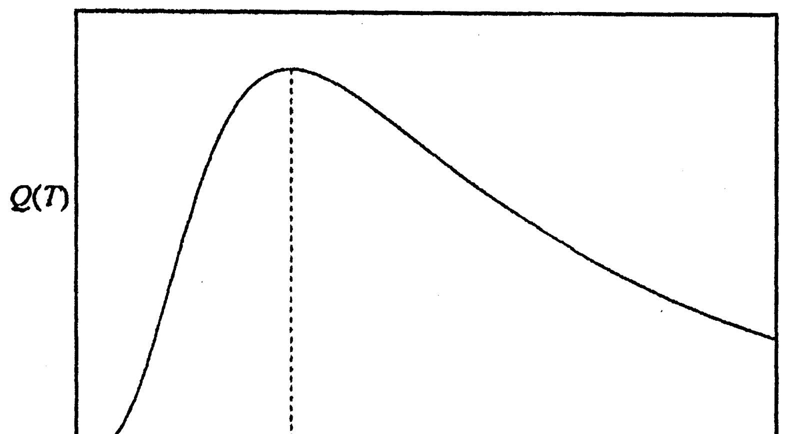


図2. 応答の振幅 $Q(T)$ がある温度 T_{max} のところで最大となる[2]。これが確率共鳴である。

$$\tau = \tau_0 e^{\frac{\Delta}{k_B T}} \qquad (2.1)$$

のように仮定する（Arrhenius 型の緩和時間）。[2〜4]

ここでは、出来る限り簡単な量子スピン系を用いて、量子効果の本質を調べることにする。そこで、1個のスピンに周期外力とノイズがかかっている系を扱うことにする。ノイズの効果は、(1.1)式の緩和項として取り込むことにして、外力 $H\cos(\omega t)$ の代りに、次の非エルミートハミルトニアン

$$\mathcal{H}(t) = -\Gamma\sigma^x - \mu_B H e^{i\omega t}\sigma^z, \qquad (2.2)$$

を考える。まず、この節では、外力 $He^{i\omega t}$ の1次までの応答 $\chi_0(\omega)He^{i\omega t}$ を求める。磁化 $m(t)=\mu_B\langle\sigma^z\rangle_t$ は、長い計算の結果[2]、次のように表される：

$$m(t) = \mathrm{Re}[\chi_0(\omega)He^{i\omega t}]; \text{外力 } H\cos(\omega t) \text{ に対する応答}. \qquad (2.3)$$

ただし、磁化率 $\chi_0(\omega)$ は 双対性 $\chi_0(-\omega)=\chi_0^*(\omega)$ を充たし

$$\chi_0(\omega) = \left(\frac{\mu_B^2}{k_B T}\right)\left(\frac{\tanh(\beta\Gamma)}{\beta\Gamma}\right)\frac{\varepsilon(\varepsilon+i\omega)+\gamma^2}{(\varepsilon+i\omega)^2+\gamma^2}, \qquad (2.4)$$

と書ける[2]。ここで、$\gamma=2\Gamma/\hbar$ である。当然のことであるが、静的磁化率 $\chi_0(0)$ は、(2.4)式より、

$$\chi_0(0) = \left(\frac{\mu_B^2}{k_B T}\right)\frac{\tanh(\beta\Gamma)}{\beta\Gamma} \qquad (2.5)$$

となり，直接，平衡系の密度行列

$$\rho_{\rm eq} = {\rm e}^{-\beta\mathcal{H}(0)}/{\rm Tr}\,{\rm e}^{-\beta\mathcal{H}(0)} \tag{2.6}$$

より計算したものと一致する。

さて，この系での確率共鳴は，時間が充分経過して定常状態になったときの振動項

$$m(t) = Q(T)\cos(\omega t + \phi) \tag{2.7}$$

の振幅 $Q(T)$ の振舞いとして定義される。

それは，(2.4)式より，（詳しくは追記A参照）

$$m(t) = \left({\rm Re}\,\chi_0(\omega)\right)\cos(\omega t) - \left({\rm Im}\,\chi_0(\omega)\right)\sin(\omega t)$$

$$= \left\{\left({\rm Re}\,\chi_0(\omega)\right)^2 + \left({\rm Im}\,\chi_0(\omega)\right)^2\right\}^{1/2}\cos(\omega t + \phi)$$

$$= Q(T)\cos(\omega t + \phi)\,;\; Q(T) = |\chi_0(\omega)|,$$

$$Q(T) = \left(\frac{\mu_{\rm B}^2 H}{k_{\rm B}T}\right)\left(\frac{\tanh(\beta\Gamma)}{\beta\Gamma}\right)\frac{(R^2+S^2)^{1/2}}{(\varepsilon^2+\gamma^2-\omega^2)^2+(2\varepsilon\omega)^2}, \tag{2.8}$$

$$R = (\varepsilon^2+\gamma^2)^2 + (\varepsilon^2-\gamma^2)\omega^2 \tag{2.9}$$

$$S = \varepsilon\omega(\varepsilon^2+\gamma^2+\omega^2) \tag{2.10}$$

と求まる。[2)] この $Q(T)$ の表式は，このままでは複雑過ぎて

その振舞いがよくわからないので，$\gamma \ll \varepsilon_0 \equiv 1/\tau_0$の極限で，$Q(T)$を簡単化すると，

$$Q(T) = \left(\frac{\mu_B^2 H}{k_B T}\right)\left(\frac{\tanh(\beta\Gamma)}{\beta\Gamma}\right)\frac{1}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}$$

$$= \frac{\chi_0(0)\,H}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}} \qquad (2.11)$$

となる。緩和時間τの温度依存性(2.1)を考慮すると

$$Q(T) \sim \frac{1}{T} e^{-\frac{\Delta}{k_B T}} \to 0 \quad ; T \to 0 \qquad (2.12)$$

及び

$$Q(T) \sim \frac{1}{T} \to 0 \quad ; T \to \infty \qquad (2.13)$$

のように$T \to 0$と$T \to \infty$で，いずれも零に近づくので，$Q(T)$は途中の温度で図2のように最大となり，共鳴が起ることがわかる。量子効果は，(2.11)の因子$\tanh(\beta\Gamma)/\beta\Gamma$で表される。この値は有限温度では1より小さいので，量子効果によって，(2.2)の模型では確率共鳴が抑制されることがわかる。このように，確率共鳴現象では，古典的ノイズと量子ゆらぎは逆の効果を与える。（当然ながら，$\Gamma \to 0$の極限では，よく知られた古典的確率共鳴の式に帰着する。）

3. 非線形確率共鳴

外場の強さHが大きくなると，非線形効果が期待される。今まで非線形効果の研究は見当たらない。まず，注意すべきことは，非線形現象を調べるときは，(2.2)のハミルトニアンをそのまま用いるのは誤りであるということである。$e^{i\omega t}$の代りに　$\cos(\omega t)$を用いて，

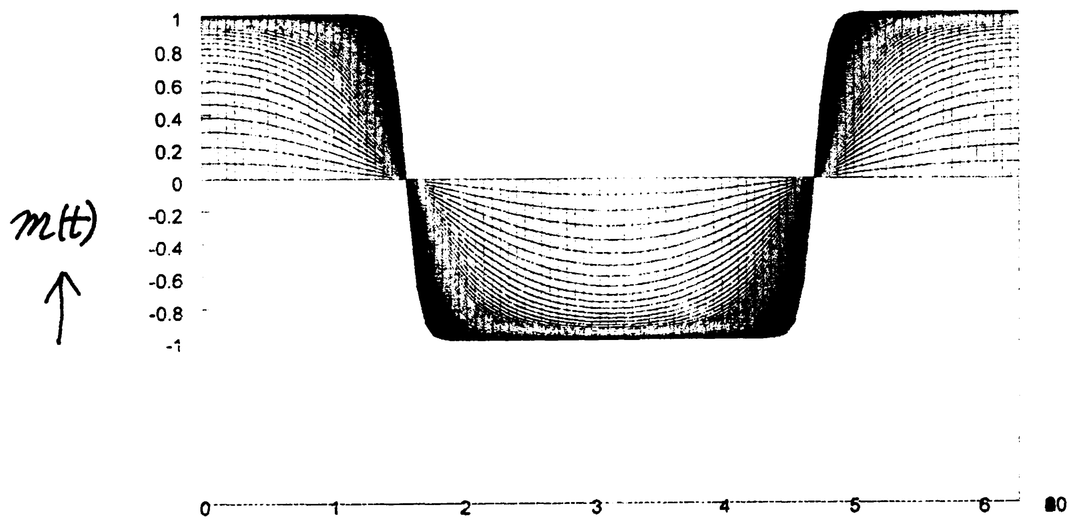
$$\mathcal{H}(t) = -\Gamma\sigma^x - \mu_B H\sigma^z \cos(\omega t) \qquad (3.1)$$

を用いなければならない。$(e^{i\omega t})^m$と$(e^{-i\omega t})^n$のような項の積の効果が現れるので一般項の計算は複雑になる。幸い，(3.1)に対しては，無限次まで求めることが可能であり，それは，

$$m(t) = \tanh\left[Q(T)\cos(\omega t + \phi)\right] \qquad (3.2)$$

の形にまとまる。[5] これを図示すると，波形が非線形に変形されて，図3のようになる。外力が大きくなる程，正弦波から遠ざかり，矩形波に近づく。

実験によって，このような非線形効果が観測されることを期待する。



$\longrightarrow \omega t$ (時間)

図3. 非線形確率共鳴曲線

以上では、(3.1)のような具体的な模型で研究したが、一般に、非線形応答 $m(t)$ は充分時間が経過した後の定常状態では、

$$m(t) = f\left(\frac{\mu_B^2}{k_B T} \frac{g(T)\, H}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \cos(\omega t + \phi) \right) \tag{3.3}$$

のような振舞いをするものと思われる。ただし、$g(T)$ は量子効果を表す因子である。また、関数 $f(x)$ は、x が小さいときは、$f(x) \sim x$ であり、$x \to \infty$ では、有限の値に近づく。より詳しくは追記Bを参照して欲しい。

4. おわりに

この報告では，(1.1)のような散逸フォン・ノイマン方程式を出発点にして議論した。熱浴との相互作用をミクロに取り入れて計算することも可能であるが，非常に複雑な解析となる。また，現象論の式もいろいろあるが，緩和項近似を行うと，最終的には，(1.1)式に帰着する。さらに，相互作用のある多体量子系[3,4]に拡張することも可能であるが，解析的な計算は困難である。数値的な計算による研究は今後の課題である。

謝辞

本研究においては，鈴木秀則博士，高橋亮博士，および院生の橋爪洋一郎氏に有益な議論を頂き感謝致します。また，科学研究費特定領域研究8079005K"不規則系の統計力学と古典および量子情報統計力学の境界領域の開拓"の支援を受けたことにも感謝します。

追記A: 線形応答の表現形式, 双対性および解析性

これから記す内容は特に目新しいことではないが, 非平衡統計力学の講義などをする際には参考になるであろう。

一般に, 線形応答を定式化する際には, ヘルミートなハミルトニアン

$$\mathcal{H}(t)=\mathcal{H}_0-AF\cos(\omega t) \qquad (A.1)$$

に対して, 外力 $F\cos(\omega t)$ の1次の応答を求めるのが物理的である。しかし, 通常は, 非エルミートなハミルトニアン

$$\mathcal{H}(t)=\mathcal{H}_0-AFe^{i\omega t} \qquad (A.2)$$

に対して, 物理量 B の平均 $\langle B\rangle_t$ を F の1次まで求めて

$$\langle B\rangle_{t;\omega}=\chi_0(\omega)Fe^{i\omega t} \qquad (A.3)$$

と表す。 ここに, $\chi_0(\omega)$ は線形感受率である。(R. Kubo, J. Phys. Soc. Jpn 12 (1957) 570参照)

同様にして, $Fe^{-i\omega t}$ に対する線形応答 $\langle B\rangle_{t;-\omega}$ は

$$\langle B\rangle_{t;-\omega}=\chi_0(-\omega)Fe^{-i\omega t} \qquad (A.4)$$

と表されるから, 外力 $F\cos(\omega t)$ に対する線形応答 $\langle B\rangle_t$ は

$$\langle B\rangle_t = \frac{1}{2}\left(\langle B\rangle_{t;\omega} + \langle B\rangle_{t;-\omega}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\chi_0(\omega)Fe^{i\omega t} + \chi_0(-\omega)Fe^{-i\omega t}\right) \quad \text{(A.5)}$$

ここで，$\chi_0(\omega)$ に関する"スス対称性" $\chi_0(-\omega) = \chi_0^*(\omega)$ を用いると，

$$\langle B\rangle_t = \frac{1}{2}\left[\chi_0(\omega)Fe^{i\omega t} + \left(\chi_0(\omega)Fe^{i\omega t}\right)^*\right]$$

$$= \mathrm{Re}\left(\chi_0(\omega)Fe^{i\omega t}\right)$$

$$= \left[\left(\mathrm{Re}\,\chi_0(\omega)\right)\cos(\omega t) - \left(\mathrm{Im}\,\chi_0(\omega)\right)\sin(\omega t)\right]F$$

$$= \left\{\left(\mathrm{Re}\,\chi_0(\omega)\right)^2 + \left(\mathrm{Im}\,\chi_0(\omega)\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} F\cos(\omega t + \phi)$$

$$= |\chi_0(\omega)| F\cos(\omega t + \phi) \quad \text{(A.6)}$$

と表される。ここに ϕ は位相のずれである。
通常の場合，$\chi_0(\omega)$ は ω に関して解析的であるが，$\langle B\rangle_t$ の応答の大きさは $\chi_0(\omega)$ の絶対値で表されているので，ω に関して解析的でない。尚，吸収は $\mathrm{Im}\,\chi_0(\omega)$ を用いて表される。

追記B: 古典系における非線形確率共鳴

一般的な古典系での非線形確率共鳴を本文の方法で議論する。(1.1)式で右辺の第1項が動かない系を考える。その場合には、解は次式で与えられる:

$$\rho(t)=e^{-\varepsilon t}\left(\int_0^t e^{\varepsilon s}\varepsilon(T)\rho_{quas}(s)\,ds+\rho(0)\right). \quad (B.1)$$

物理量 A に共役な力 $F\cos(\omega t)$ がかかった場合には

$$\mathcal{H}(t)=\mathcal{H}_0-AF\cos(\omega t) \quad (B.2)$$

として、$t\to$ 充分大に対して、$\varepsilon=\varepsilon(T)$ より

$$\rho(t)=\varepsilon(T)\int_0^t e^{-\varepsilon(T)(t-s)}\rho_{quas}(t-s)\,ds \quad (B.3)$$

と表わせる。ここで、$\rho_{quas}(t)$ は、

$$\rho_{quas}(t)=e^{-\beta\mathcal{H}_0+\beta AF\cos(\omega t)}/Z_{quas}(t),$$

であり、$Z_{quas}(t)$ は次式で定義される: (B.4)

$$Z_{quas}(t)=\mathrm{Tr}\,e^{-\beta\mathcal{H}_0+\beta AF\cos(\omega t)}. \quad (B.5)$$

具体的にこれらの式を計算するのは困難であるが、応答 $\langle A\rangle_t=\mathrm{Tr}\,A\rho(t)$ より非線形確率共鳴が導かれる。

以上の形式的な議論をより具体的に進めるために，出発点にとる散逸フォン・ノイマン方程式として，$\rho(t)$ ではなく，$\rho(t)=e^{-\eta(t)}$ で定義される $\eta(t)$ に対する

$$\frac{\partial \eta(t)}{\partial t}=\frac{1}{i\hbar}\left[\mathcal{H}(t),\eta(t)\right]-\varepsilon(T)\left(\eta(t)-\eta_{quas}(t)\right) \quad (B.6)$$

という現象論の式を採用することにする。ただし，$\rho_{quas}(t)=e^{-\eta_{quas}(t)}$ である。$\varepsilon(T)=0$ の時は，(B.6) と (1.1) とは等価であることが，量子解析[5-9]を用いて導かれている。$\varepsilon(T)\neq 0$ の場合には，2つの式は等価ではないが，本質的には同等なものとみなすことができる。特に，外力 F の1次までは完全に等価になる。

さて，$\rho(t)$ を用いて議論した時と同様に (B.6) の右辺第1項が効かない場合には，(B.6) の解は，$\eta_{quas}(t)=\beta\mathcal{H}(t)=\beta\mathcal{H}_0-\beta AF\cos(\omega t)$ を用いて充分大きな時間 t に対して，$\tau=1/\varepsilon$ より

$$\eta(t)=\beta\mathcal{H}_0-\beta AF\,S(\omega t;\omega\tau)+(\text{規格化}) \quad (B.7)$$

と表わせる。ただし，$S(\omega t;\omega\tau)$ は次式で与えられる：

$$S(\omega t;\omega\tau)=\frac{\cos(\omega t)+(\omega\tau)\sin(\omega t)}{1+(\omega\tau)^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}\cos(\omega t+\phi). \quad (B.8)$$

したがって，充分時間が経過した後のAの期待値は

$$\langle A\rangle(t) \equiv \mathrm{Tr}\,A\rho(t) = \mathrm{Tr}\,A\,e^{-\eta(t)}$$

$$= \mathrm{Tr}\,A\,e^{-\beta\mathcal{H}_0 + AF\beta S(\omega t;\,\omega\tau)} \Big/ \mathrm{Tr}\,e^{-\beta\mathcal{H}_0 + AF\beta S} \qquad (B.8)$$

と与えられる。$\mathcal{H}_0$とAが可換であるとすると，

$\langle A\rangle_0 \equiv \mathrm{Tr}\,A\,e^{-\beta\mathcal{H}_0} / \mathrm{Tr}\,e^{-\beta\mathcal{H}_0}$の定義を用いて，

$$\langle A\rangle(t) = \left\langle A\,e^{AF\beta S(\omega t;\,\omega\tau)}\right\rangle_0 \Big/ \left\langle e^{AF\beta S(\omega\tau;\,\omega\tau)}\right\rangle_0$$

$$\equiv f(\beta S)\ ;\ S = S(\omega t\,;\,\omega\tau) \qquad (B.9)$$

と表わされる。通常，関数$f(x)$は単調関数である。一方，緩和時間$\tau \equiv 1/\varepsilon(T)$が系のバリア$\Delta$を用いて，(2.1)式すなわち

$$\tau = \tau_0\,e^{\Delta/k_B T} \qquad (B.10)$$

のように振舞う場合には，関数（変数）βSは$\beta S \to 0\ (T \to 0)$および$\beta S \to \frac{1}{T} \to 0\ (T \to \infty)$のような漸近的振舞いをするので，応答$\langle A\rangle(t)$は振動しながら，その振幅は，図2のように途中の温度で必ず極大値を持つことになり，非線形確率共鳴を示すことになる。その一番簡単な例が(3.1)式の$\Gamma = 0$（すなわち$\mathcal{H}_0 = 0$）の場合で，$f(\beta S) = \tanh(\beta S)$となる。

参考文献

1) 『物理学大辞典』(朝倉書店，2005年)

2) M. Suzuki, in QP-PQ vol. XXI (2008年, World Scientific) ed. L. Accardi, W. Freudenberg & M. Ohya.

3) R. Takahashi and M. Suzuki, Physica A353, 85 (2005).

4) R. Takahashi and M. Suzuki, Physica 364, 111 (2006) 及びその引用文献参照。

5) 鈴木増雄，日本物理学会第64回年次大会 (立教大学) 2009年3月27日発表 (27pTJ14).

6) M. Suzuki, Commun. Math. Phys. 183, 339 (1997).

7) M. Suzuki, J. Math. Phys. 38, 1183 (1997).

8) M. Suzuki, Rev. Math. Phys. 11, 234 (1999).

9) 鈴木増雄，『統計力学』(岩波書店，現代物理学叢書，2000年) (2008年秋品切れ。しかし，近々増刷予定。)